

8.4.3 Výpočty limit

Předpoklady: 080401, 080402

Z minulé hodiny víme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0; \quad |q| < 1.$$

Zřejmě také platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$, $c \in \mathbb{R}$ (limita konstantní posloupnosti je rovna jejím členům).

Spočítat každou z těchto limit je docela dřina.

Jak korektně spočítat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3n}{n}$?

Zdá se, že platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3n}{n} = 3$, ale je to jenom náš odhad, který zatím musíme dokázat z

definice.

$\Rightarrow$ Potřebujeme věty pro výpočet limit posloupností, které by nás zbavily nutnosti neustálého dokazování.

Jestliže posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ pak je konvergentní i posloupnost:

$(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$	a platí	$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$
$(a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}$	a platí	$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a - b$
$(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$	a platí	$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$

Jestliže posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ pak je konvergentní i posloupnost $(c \cdot a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde c je libovolné reálné číslo a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot a$$

Jestliže posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ a přitom $b \neq 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pak je konvergentní i posloupnost

$$\left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n=1}^{\infty} \text{ a platí } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

Př. 1: Popiš běžnými slovy, význam a možné využití výše uvedených vět o posloupnostech.

Věty umožňují pomocí sčítání, odčítání, násobení a dělení rozdělit předpisy složitější zadaných posloupností na jednodušší, a určit limitu složitější posloupnosti, pomocí limit jednodušších posloupností, ze kterých ji dokážeme složit.

Ted' už umíme vypočítat limity mnoha dalších posloupností:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 2 \cdot 0 + 3 = 3$

Proč jsme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3n}{n}$ neupravovali jinak? Třeba takto: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3n}{n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2+3n}{\lim_{n \rightarrow \infty} n}$?

Zkusíme, kam by tento směr vedl: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3n}{n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2+3n}{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n}{\lim_{n \rightarrow \infty} n}.$

Kolik je $\lim_{n \rightarrow \infty} n$? Posloupnost $(n)_{n=1}^{\infty}$ limitu nemá, její hodnoty se blíží k ∞ . Zkusíme dosadit

do zlomku: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3n}{n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2+3n}{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n}{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = \frac{2+3 \cdot \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}.$

Proč se výraz $\frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3n}{n}$ rovná zrovna 3?

Výraz $\frac{\infty}{\infty}$ patří mezi takzvané „neurčitě výrazy“ a může se rovnat téměř všemu:

- $\frac{\infty}{\infty} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2}{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty,$
- $\frac{\infty}{\infty} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n}{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi = \pi,$
- $\frac{\infty}{\infty} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$
- ...

$\Rightarrow$ Při úpravách výrazu posloupnosti musíme postupovat tak, abychom vyrobili výrazy, jejich limitu známe: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$; $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$; $|q| < 1$ (typicky výrazy s neznámou ve jmenovateli).

Př. 2: Vypočti limity posloupností:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4^n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{3n}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{2n^2}$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{(2^n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = \pi \cdot 0 \cdot 0 = 0$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{2n^2} &= \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (1 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ne vždy je možné zlomek snadno rozdělit: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 - 2n + 3}$?

Pomůžte nám vhodné rozšíření zlomku (na nejvyšší mocninu):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 - 2n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{3}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{2}{1 - 0 + 0} = 2$$

Př. 3: Vypočti limity posloupností:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2}{3n^2 + 2n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n}{n^3 - 2n}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n + 3}$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2}{3n^2 + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{2}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{2 + 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n}{n^3 - 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2}{n^3} + \frac{3n}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} - \frac{2n}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{2}{n^2}} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = 0$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2^n}{2^n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{2^n}{2^n}}{\frac{2^n}{2^n} + \frac{3}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 1}{1 + \frac{3}{2^n}} = \frac{2}{1 + 0} = 2$

Př. 4: Rozhodni, kdy je aritmetická posloupnost $a_1; d$ konvergentní.

Vzorec pro n -tý člen: $[a_1 + d(n-1)]_{n=1}^{\infty} \Rightarrow$

- pokud je $d \neq 0$, hodnoty posloupnosti se neustále zvětšují nebo zmenšují o stále stejné číslo $\Rightarrow$ posloupnost je divergentní,
- pokud $d = 0$, všechny členy posloupnosti se rovnají $a_1 \Rightarrow$ posloupnost je konvergentní a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1$.

Př. 5: Rozhodni, kdy je geometrická posloupnost $a_1; q$ konvergentní.

Vzorec pro n -tý člen: $[a_1 \cdot q^{n-1}]_{n=1}^{\infty} \Rightarrow$ dvě možnosti podle hodnoty a_1 :

- $a_1 = 0 \Rightarrow$ všechny členy posloupnosti se rovnají nule (na q nezáleží) $\Rightarrow$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,
- $a_1 \neq 0 \Rightarrow$ záleží na q :
 - pokud je $|q| < 1$, absolutní hodnota členů posloupnosti se neustále zmenšuje $\Rightarrow$ členy posloupnosti se blíží 0 $\Rightarrow$ posloupnost je konvergentní a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,
 - pokud platí $q = 1$, všechny členy posloupnosti se rovnají $a_1 \Rightarrow$ posloupnost je konvergentní a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1$,
 - pokud platí $q = -1$, členy posloupnosti přeskakují mezi hodnotami a_1 a $-a_1 \Rightarrow$ posloupnost je divergentní,
 - pokud platí $|q| > 1$ absolutní hodnota členů posloupnosti se neustále zvětšuje $\Rightarrow$ posloupnost je divergentní.

Př. 6: Petáková:
strana 67/cvičení 8

Shrnutí: S limitami posloupností můžeme počítat podobně jako s čísly.